

# DRGANIA MECHANICZNE

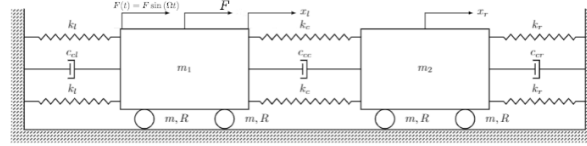
## TŁUMIONE UKŁADY O WIELU STOPNIACH SWOBODY

Forced Damped Trolleys With Springs Report z 2 St.S. dla  $k_l = 89k_0$ ,  
 $k_r = 89k_0$ ,  $c_r = k_r\lambda$ ,  $c_l = k_l\lambda$ ,  $c_c = k_c\lambda$ ,  $m_2 = m_0$ ,  $m_1 = m_0$ ,  $F = 15F_0$ ,  
 $m = m_0$ ,  $k_c = 86k_0$

3 lutego 2024

## Schemat systemu

Ilustracja przedstawia schemat rzeczywistego obiektu mechanicznego, wyznaczony na podstawie uprzedniej analizy rzeczywistego obiektu.



Analizując przedstawiony układ można stwierdzić, że jego liczba stopni swobody to 2.

## Tabela z wartościami parametrów do obliczeń

Przyjęte do obliczeń wartości poszczególnych parametrów przedstawia tabela 1

Tabela 1: Podstawowe wartości parametrów

Parametr	Wartość
$k_l$	$89k_0$
$k_r$	$89k_0$
$c_r$	$k_r \lambda$
$c_l$	$k_l \lambda$
$c_c$	$k_c \lambda$
$m_2$	$m_0$
$m_1$	$m_0$
$F$	$15F_0$
$m$	$m_0$
$k_c$	$86k_0$

## Energia kinetyczna

Energia kinetyczna układu wyrażona jest wzorem:

$$T = 2m_0 \dot{x}_l^2 + 2m_0 \dot{x}_r^2 \quad (1)$$

Wyznaczona wielkość określa energię układu wynikającą z jego własności inercyjnych (energię zmagazynowaną w elementach bezwładnych).

## Energia potencjalna

Energia potencjalna układu wyrażona jest wzorem:

$$V = 86k_0 (-x_l + x_r)^2 + 89k_0 x_l^2 + 89k_0 x_r^2 \quad (2)$$

Zaprezentowana zależność opisuje oddziaływanie potencjalnych pól sił w których znajduje się obiekt.

## Dyssypacyjna funkcja Rayleigh'a

Energia rozpraszana tłumieniem wyrażona jest wzorem:

$$D = 43k_0 \lambda (\dot{x}_l - \dot{x}_r)^2 + \frac{89k_0 \lambda \dot{x}_l^2}{2} + \frac{89k_0 \lambda \dot{x}_r^2}{2} \quad (3)$$

Podana zależność stanowi potencjał dysynpacyjny Rayleigh'a, który poddany różniczkowaniu względem wektora prędkości uogólnionych pozwala na określenie sił wiskotycznego tłumienia.

### Lagrangian układu (Funkcja Lagrange'a)

Lagrangian układu dany jest następującym wyrażeniem (4):

$$L = -175k_0x_l^2 - 175k_0x_r^2 + 2m_0\dot{x}_l^2 + 2m_0\dot{x}_r^2 + 172k_0x_lx_r \quad (4)$$

Równania Eulera Lagrange'a dla rozważanego przypadku są następujące:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_l} - \frac{\partial L}{\partial x_l} = Q_{x_l}^N \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_r} - \frac{\partial L}{\partial x_r} = Q_{x_r}^N \quad (6)$$

Kolejne pochodne wynikające z zastosowania równań Eulera-Lagrange'a są następujące:

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = -350k_0x_l + 172k_0x_r \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_r} = -350k_0x_r + 172k_0x_l \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = 4m_0\dot{x}_l \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} = 4m_0\dot{x}_r \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = 4m_0\ddot{x}_l \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} = 4m_0\ddot{x}_r \quad (12)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_l} = -86k_0\lambda\dot{x}_r + 175k_0\lambda\dot{x}_l \quad (13)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_r} = -86k_0\lambda\dot{x}_l + 175k_0\lambda\dot{x}_r \quad (14)$$

Wyniki przedstawionych operacji wykorzystuje się wyznaczenia równań ruchu układu.

### Równanie ruchu

Wykorzystując obliczone pochodne, wyznacza się równania ruchu na podstawie odpowiedniego wzoru. Równania ruchu układu przedstawiają zależności: (15)- (16)

$$15F_0 - 172k_0x_r - 15F_0 \sin(\Omega t) + 4m_0\ddot{x}_l + 350k_0x_l - 86k_0\lambda\dot{x}_r + 175k_0\lambda\dot{x}_l = 0 \quad (15)$$

$$172k_0x_l + 4m_0\ddot{x}_r + 350k_0x_r - 86k_0\lambda\dot{x}_l + 175k_0\lambda\dot{x}_r = 0 \quad (16)$$

Wyznaczone równania stanowią matematyczny opis dynamiczny właściwości układu. Dalsza analiza pozwala na skuteczną analizę działania modelowanego obiektu i określenie jego parametrów mechanicznych.

## Wyznaczanie macierzy fundamentalnej

Z równań ruchu wyznaczono macierz mas i sztywności układu::

$$M = \begin{bmatrix} 4m_0 & 0 \\ 0 & 4m_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$K = \begin{bmatrix} 350k_0 & -172k_0 \\ -172k_0 & 350k_0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Macierz fundamentalna, na podstawie której wyznaczono równanie charakterystyczne rozważanego układu  $\Delta$ , przedstawiają się następująco::

$$A = \begin{bmatrix} 175ik_0\lambda\omega + 350k_0 - 4m_0\omega^2 & -86ik_0\lambda\omega - 172k_0 \\ -86ik_0\lambda\omega - 172k_0 & 175ik_0\lambda\omega + 350k_0 - 4m_0\omega^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Delta = 92916k_0^2 + 16m_0^2\omega^4 - 23229k_0^2\lambda^2\omega^2 - 2800k_0m_0\omega^2 + 92916ik_0^2\lambda\omega - 1400ik_0\lambda m_0\omega^3 \quad (20)$$

Macierz fundamentalna pozwala określić rozwiązanie ustalone. Natomiast bazując na równaniu charakterystycznym określa się częstości własne układu.

## Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne przedstawia wyrażenie:

$$\begin{aligned} X_{g-xl(t)} = & C_1 e^{-\frac{89k_0\lambda t}{8m_0}} \cos\left(t\sqrt{-\frac{7921k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{89k_0}{2m_0}}\right) + C_2 e^{-\frac{89k_0\lambda t}{8m_0}} \sin\left(t\sqrt{-\frac{7921k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{89k_0}{2m_0}}\right) \\ & + C_3 e^{-\frac{261k_0\lambda t}{8m_0}} \cos\left(t\sqrt{-\frac{68121k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{261k_0}{2m_0}}\right) \\ & + C_4 e^{-\frac{261k_0\lambda t}{8m_0}} \sin\left(t\sqrt{-\frac{68121k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{261k_0}{2m_0}}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} X_{g-xr(t)} = & C_1 e^{-\frac{89k_0\lambda t}{8m_0}} \cos\left(t\sqrt{-\frac{7921k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{89k_0}{2m_0}}\right) + C_2 e^{-\frac{89k_0\lambda t}{8m_0}} \sin\left(t\sqrt{-\frac{7921k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{89k_0}{2m_0}}\right) \\ & - C_3 e^{-\frac{261k_0\lambda t}{8m_0}} \cos\left(t\sqrt{-\frac{68121k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{261k_0}{2m_0}}\right) \\ & - C_4 e^{-\frac{261k_0\lambda t}{8m_0}} \sin\left(t\sqrt{-\frac{68121k_0^2\lambda^2}{64m_0^2} + \frac{261k_0}{2m_0}}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

Rozwiązanie ogólne opisuje ruch analizowanego układu (przedstawia przemieszczenie w funkcji czasu) i wynika z rozważań dotyczących drgań swobodnych układu.

## Rozwiązanie szczególne

Rozwiązanie szczególne dane jest następującym wyrażeniem:

$$X_{s-xl}(t) = \left( \frac{1.88F_0 \left( -\Omega^2 + \frac{44.5k_0}{m_0} \right)}{m_0 \left( \frac{495.0\Omega^2 k_0^2 \lambda^2}{m_0^2} + 1.98 \cdot 10^3 \left( -0.0225\Omega^2 + \frac{k_0}{m_0} \right)^2 \right)} + \frac{1.88F_0 \left( -\Omega^2 + \frac{131.0k_0}{m_0} \right)}{m_0 \left( \frac{4.26 \cdot 10^3 \Omega^2 k_0^2 \lambda^2}{m_0^2} + 1.7 \cdot 10^4 \left( -0.00766\Omega^2 + \frac{k_0}{m_0} \right)^2 \right)} \right) \sin(\Omega t)$$

(23)

$$X_{s-xr}(t) = \left( \frac{1.88F_0 \left( -\Omega^2 + \frac{44.5k_0}{m_0} \right)}{m_0 \left( \frac{495.0\Omega^2 k_0^2 \lambda^2}{m_0^2} + 1.98 \cdot 10^3 \left( -0.0225\Omega^2 + \frac{k_0}{m_0} \right)^2 \right)} - \frac{1.88F_0 \left( -\Omega^2 + \frac{131.0k_0}{m_0} \right)}{m_0 \left( \frac{4.26 \cdot 10^3 \Omega^2 k_0^2 \lambda^2}{m_0^2} + 1.7 \cdot 10^4 \left( -0.00766\Omega^2 + \frac{k_0}{m_0} \right)^2 \right)} \right) \sin(\Omega t)$$

(24)

Rozwiązanie szczególne układu przedstawia zależność położenia od czasu odpowiednią dla drgań wymuszonych